Analiz IV Dersi 1. Quiz Sınavı Soruları ve Cevapları

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2+3}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ olduğunda $\left|f(x,y) - f(0,0)\right| = \left|\dfrac{x+y}{x^2+y^2+3} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmalıyız.

$\forall \varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $\delta = \varepsilon/2$ seçilirse,

$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ olduğunda

$$|x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \wedge |y| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

olup,

$$\left|f(x,y) - f(0,0)\right| = \left|\frac{x+y}{x^2+y^2+3} - 0\right| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2+3} < |x+y|$$
$$\leq |x| + |y| < \delta + \delta = 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. O halde f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında süreklidir.

2) Aşağıda verilen kümelerin kompakt olup olmadıklarını belirleyiniz.

(a) $E = \{1/k \mid k = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$.

(b) $E = \{(x,y) \mid a \leq x^2+y^2 \leq b \wedge 0 < a < b\} \subset \mathbb{R}^2$.

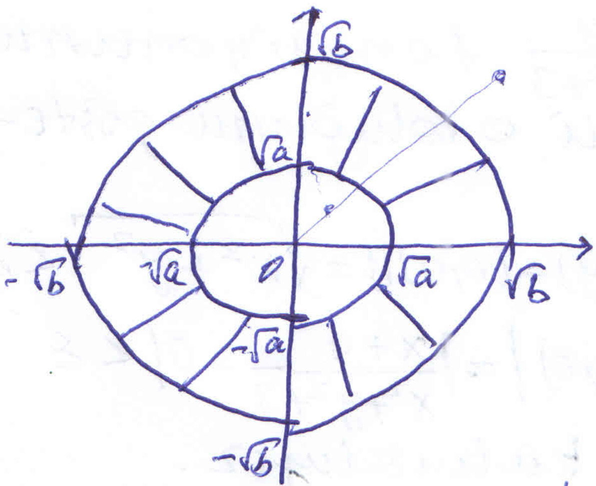
Çözüm. $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ kapalı ve sınırlı.

(a) $0 \in E'$, çünkü $\lim_{k\to\infty}(1/k) = 0$ dır.

$0 \notin E$ olduğundan $E' \not\subset E$ dir, dolayısıyla E kapalı değildir.

Sonuç olarak E, $\mathbb{R}$ de kompakt değil.

(b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.



$\forall (x,y) \in E$ için

$$a \leq x^2+y^2 \leq b$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} \leq \|(x,y)\| \leq \sqrt{b}$$

dır.

$\forall (x,y) \in E$ için

$$\|(x,y)\| \leq \sqrt{b}$$

olduğundan E sınırlıdır.

$\forall (x,y) \in E^t = \mathbb{R}^2 \setminus E$ için

$$\|(x,y)\| < \sqrt{a} \quad \vee \quad \|(x,y)\| > \sqrt{b}$$

olup,

$$\|(x,y)\| < \sqrt{a} \Rightarrow r = \sqrt{a} - \|(x,y)\| \Rightarrow B((x,y),r) \subset E^t$$

$\vee$

$$\|(x,y)\| > \sqrt{b} \Rightarrow r = \|(x,y)\| - \sqrt{b} \Rightarrow B((x,y),r) \subset E^t$$

olur. Buna göre E^t nin keyfi bir (x,y) noktası iç noktadır, yani E^t açıktır, onun tümleyeni olan E kapalıdır.

Sonuç olarak E kapalı ve sınırlı olup, kompakttır.